

# Notes sur l'indice des algèbres de Lie (II)

par : Mustapha RAÏS <sup>1</sup>

Ce texte est une suite à : “Notes sur l'indice des algèbres de Lie (I)”, dont les notations sont conservées pour l'essentiel.

## 1 Les champs de vecteurs invariants et leurs dérivées

• Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie (de dimension finie sur un corps  $k$ , disons  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  une application polynomiale (i.e. un champ de vecteurs sur  $\mathfrak{g}$ , polynomial), homogène de degré  $m \geq 1$ , et invariante sous l'action du groupe adjoint  $G$  de  $\mathfrak{g}$ . On a donc :

$$(1) \quad P(\text{Ad}(g)x) = \text{Ad}(g)P(x) \quad (x \in \mathfrak{g}, g \in G).$$

La forme infinitésimale de cette propriété est :

$$dP(x).[y, x] = [y, P(x)] \quad (x \text{ et } y \text{ dans } \mathfrak{g}).$$

(Ici et plus loin, on utilise les notations habituelles du calcul différentiel ; par exemple :  $dP(x)$  est la valeur au point  $x$  de la dérivée première de la fonction  $P$ , c'est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ , et dans le premier membre de l'égalité ci-dessus, on applique cet endomorphisme au “vecteur”  $[y, x]$ .)

On notera que, de cette égalité, il résulte immédiatement que  $P(x)$  appartient au centre  $z(z(x))$  du centralisateur  $z(x)$  de  $x$ .

• On écrit la formule de Taylor pour  $P$  :

$$(2) \quad P(x + ty) = \sum_{0 \leq k \leq m} \frac{t^k}{k!} d^k P(x).y^{(k)} \quad (x \text{ et } y \text{ dans } \mathfrak{g}, t \text{ dans } k).$$

Chaque terme  $d^k P(x).y^{(k)}$ , considéré comme une fonction de  $x$  et de  $y$ , est polynomial homogène de degré  $(m - k)$  en  $x$ , de degré  $k$  en  $y$  et on a (une formule d'échange) :

$$(3) \quad \frac{1}{k!} d^k P(x).y^{(k)} = \frac{1}{(m - k)!} d^{m-k} P(y).x^{(m-k)}.$$

En particulier :

$$m! P(x) = \mathcal{P}.x^{(m)} \quad (x \in \mathfrak{g})$$

où  $\mathcal{P} = d^m P$  est la dérivée à l'ordre “maximum”  $m$  (c'est donc une  $m$ -forme symétrique sur  $\mathfrak{g}$ , de degré zéro en  $x$ , donc indépendante de  $x$ ).

---

<sup>1</sup>Université de POITIERS - Département de Mathématiques - Téléport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie - BP 30179 - 86962 FUTUROSOCPE CHASSENEUIL Cedex

• L'invariance de  $P$  se propage en l'invariance des diverses fonctions intervenant dans le second membre de la formule (2). On a en fait (pour tous  $x, y$  dans  $\mathfrak{g}$ , et  $0 \leq k \leq m$ ) :

$$(4) \quad [z, d^k P(x).y^{(k)}] = d^{k+1} P(x).[z, x].y^{(k)} + k d^k P(x).[z, y].y^{(k-1)}.$$

• Soit  $(h, e, f)$  un  $sl(2)$ -triplet inclus dans  $\mathfrak{g}$  (s'il en existe). En utilisant les formules (4), on trouve (seule  $[h, e] = 2e$  intervient) :

$$(5) \quad [h, d^k P(h).e^{(k)}] = 2k d^k P(h).e^{(k)}$$

$$(6) \quad [e, d^k P(h).e^{(k)}] = -2 d^{k+1} P(h).e^{(k+1)}.$$

Comme :  $(ade)^{m-k} d^k P(h).e^{(k)} = (-2)^{m-k} d^m P(h).e^{(m)} = (-2)^{m-k} m! P(e)$ , on voit que sous l'hypothèse :  $P(e) \neq 0$ , les vecteurs  $d^k P(h).e^{(k)}$  ( $0 \leq k \leq m$ ) sont linéairement indépendants (ce sont des vecteurs propres de  $adh$ , associés respectivement aux valeurs propres  $0, 2, 4, \dots, 2m$ ).

## 2 Le cas d'une algèbre de Lie simple

Dorénavant,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple et le corps de base est le corps des complexes. Soient  $p_1, p_2, \dots, p_r$  un système de générateurs homogènes, de degrés respectifs  $m_1+1, \dots, m_r+1$ , algébriquement indépendants, de l'algèbre  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$  des fonctions polynômes  $G$ -invariantes sur  $\mathfrak{g}$ . Ainsi  $r$  est le rang de  $\mathfrak{g}$  et  $m_1, m_2, \dots, m_r$  sont les exposants de  $\mathfrak{g}$ . Pour chaque entier  $j = 1, 2, \dots, r$  on note :  $P_j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  le gradient de  $p_j$ , calculé au moyen de la forme de Killing  $B$  de  $\mathfrak{g}$  :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 p_j(x+ty) = \langle dp_j(x), y \rangle = B(P_j(x), y) \quad (x \text{ et } y \text{ dans } \mathfrak{g}).$$

Chaque  $P_j$  est un champ de vecteurs invariant, polynomial homogène de degré  $m_j$ , et on peut appliquer le paragraphe 1 à chaque  $P_j$ , et à un élément nilpotent régulier  $e$ , de sorte que  $(h, e, f)$  est un  $sl(2)$ -triplet principal. On a donc :  $[h, P_j(e)] = 2m_j P_j(e)$ , et  $[e, P_j(e)] = 0$ . Les vecteurs  $P_j(e)$  ( $1 \leq j \leq r$ ) sont linéairement indépendants (d'après un ancien résultat de Kostant) et sont des vecteurs primitifs pour la représentation de  $\mathfrak{a} = \mathbb{C}h + \mathbb{C}e + \mathbb{C}f$  dans  $\mathfrak{g}$  (restriction à  $\mathfrak{a}$  de la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ ).

• **Notes :** Posons  $v_{j,k} = d^k P_j(h).e^{(k)}$  ( $1 \leq j \leq r$ ,  $0 \leq k \leq m_j$ ). On a donc :

$$(7) \quad [h, v_{j,k}] = 2k v_{j,k}$$

$$(8) \quad [e, v_{j,k}] = -2 v_{j,k+1}$$

avec la convention :  $v_{j,m_j+1} = 0$ .

Posons  $w_{j,k} = d^k P_j(h).f^{(k)}$  ( $1 \leq j \leq r$  et  $0 \leq k \leq m_j$ ). Par les mêmes calculs que plus haut ( $[h, f] = -2f$  intervenant à la place de  $[h, e] = 2e$ ), on trouve :

$$[h, w_{j,k}] = -2k w_{j,k} \quad \text{et} : \quad [f, w_{j,k}] = 2w_{j,k+1}.$$

Il se trouve que l'ensemble des vecteurs  $(v_{j,k})_{1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j}$  conjointement avec les  $w_{j,k}$  ( $1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq m_j$ ) forme une base de l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ , et qu'on a la décomposition triangulaire :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ , avec  $\mathfrak{h} = \sum_{1 \leq j \leq r} \mathbb{C} P_j(h)$ , et  $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq m_j}} \mathbb{C} v_{j,k}$  et  $\mathfrak{n}_- = \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq m_j}} \mathbb{C} w_{j,k}$ .

Clairement, la  $h$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  est mise en évidence :  $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\ell > 0} \mathfrak{g}^{(\ell)}$  et  $\mathfrak{n}_- = \sum_{\ell < 0} \mathfrak{g}^{(\ell)}$ .

Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration de ces faits dans [Ra].

• Considérons l'ensemble des fonctions  $\varphi_t$  sur  $\mathfrak{g}$  définies par : pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\varphi_t(x) = \varphi(x + th)$  où  $\varphi$  décrit l'ensemble  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$  des fonctions polynômes invariantes et  $t$  décrit  $\mathbb{C}$ . Il est bien connu et immédiat que deux telles fonctions sont en involution relativement au crochet de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}$ . Ce qui précède montre que l'espace engendré par les  $[e, \nabla \varphi_t(e)]$  est de dimension égale à la moitié de la dimension de l'orbite nilpotente de  $e$ . Ceci s'interprète en terme de systèmes complètement intégrables (voir par exemple [Bol]).

### 3 Le normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent

On reprend les notations du paragraphe précédent, à ceci près que l'élément nilpotent  $e$  n'est plus forcément un élément régulier. On fera toutefois l'hypothèse suivante :

“Le centre  $\delta(e)$  du centralisateur  $z(e)$  de  $e$  est engendré par la famille  $(P_j(e))_{1 \leq j \leq r}$ ”.

Soient  $j_1, \dots, j_s$  les entiers tels que  $(P_{j_1}(e), \dots, P_{j_s}(e))$  soit une base de  $\delta(e)$ . Pour simplifier les notations, on posera :

$$Q_1 = P_{j_1}, \dots, Q_s = P_{j_s}, m'_1 = m_{j_1}, \dots, m'_s = m_{j_s}, \delta(e) = \delta \text{ et } z(e) = z$$

et on supposera que les entiers  $m'_1, \dots, m'_s$  sont rangés dans l'ordre croissant (avec la terminologie de [Ri],  $(m'_1, \dots, m'_s)$  est la suite des exposants de  $(\mathfrak{g}, e)$ ).

On pose :  $y_j = dQ_j(e).h$  ( $1 \leq j \leq s$ ).

**3.1. Lemme :** Soit  $\eta$  le normalisateur de  $z$  dans  $\mathfrak{g}$ . On a :

$$\eta = z \oplus \sum_{1 \leq j \leq s} \mathbb{C} y_j.$$

**Démonstration :** Compte-tenu des formules (4), on a :

$$[e, y_j] = -2m'_j Q_j(e).$$

Ceci prouve que les  $y_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) sont linéairement indépendants, et qu'en notant  $V$  l'espace vectoriel engendré par les  $y_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ),  $ad(e)$  induit une bijection de  $V$  sur  $\delta$ . On sait par ailleurs (voir par exemple [Tau] 17.5.12) que  $\dim \eta = \dim z + \dim \delta$ . D'où le résultat.

REMARQUE : Posons  $z_j = Q_j(e)$  ( $1 \leq j \leq s$ ). Toujours avec l'aide des formules (4), on voit que :

$$[f, z_j] = dQ_j(e).[f, e] = -y_j.$$

Ceci est une autre démonstration du lemme, compte-tenu de [Tau] (17.5.6).

**3.2.** On a, compte-tenu des formules (7) :

$$[h, y_j] = 2(m'_j - 1)y_j \quad (1 \leq j \leq s)$$

$$[h, z_j] = 2m'_j z_j \quad (1 \leq j \leq s).$$

Dans la suite, on s'intéresse au calcul des  $[y_i, z_j]$  ( $1 \leq i, j \leq s$ ). Immédiatement, compte-tenu du fait que  $[y_i, z_j]$  est de  $h$ -graduation  $2(m'_i + m'_j - 1)$ , on déduit :

$$[y_i, z_j] = 0$$

lorsque  $(m'_i + m'_j - 1)$  n'est pas un exposant de  $(\mathfrak{g}, e)$ , et en particulier lorsque  $m'_i + m'_j > m'_s + 1$ .

On va retrouver ce résultat en établissant un lien avec la notion de convolution ou déplacement des invariants ( $[A]$ ,  $[G]$ ).

On pose :  $\omega_{ij} = B(Q_i, Q_j)$  où, comme indiqué plus haut,  $B$  est la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  (on peut d'ailleurs remplacer  $B$  par n'importe quel multiple scalaire non nul de  $B$ ).

**3.3. Lemme :**

$$(1) \quad [y_i, z_j] = [y_j, z_i]$$

$$(2) \quad [y_i, z_j] = 2m'_j dQ_i(e).Q_j(e)$$

$$(3) \quad dQ_i(e).Q_j(e) = (L_j Q_i)(e)$$

où  $L_j$  est l'opérateur de dérivation le long du champ de vecteurs  $Q_j$ .

$$(4) \quad [y_i, z_j] = \frac{m'_i m'_j}{m'_i + m'_j} \nabla \omega_{ij}(e)$$

où  $\nabla \omega_{ij}$  est le gradient de la fonction  $\omega_{ij}$ .

**Démonstration :** (1) Ceci est bien connu ([Pa]) :

$$0 = [f, [z_i, z_j]], \text{ et } [f, z_k] = -y_k$$

$$(2) \quad [z_j, y_i] = [z_j, dQ_i(e).h] = d^2 Q_i(e).[z_j, e].h + dQ_i(e).[z_j, h].$$

Comme  $[z_j, e] = 0$  (puisque  $z_j \in \delta$ ) et  $[z_j, h] = -2m'_j z_j$ , on arrive à :

$$[z_j, y_i] = -2m'_j dQ_i(e).Q_j(e).$$

(3) Par définition de l'opérateur différentiel  $L_j$  :

$$\begin{aligned}
L_j Q_i(x) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 Q_i(x + t Q_j(x)) \\
&= dQ_i(x).Q_j(x)
\end{aligned}$$

(4) Avec  $x$  et  $y$  dans  $\mathfrak{g}$ , on a :

$$< d\omega_{ij}(x), y > = B(dQ_i(x).y, Q_j(x)) + B(Q_i(x), dQ_j(x).y)$$

$$\begin{aligned}
B(dQ_i(x).y, Q_j(x)) &= d^2 q_i(x)(y, Q_j(x)) \\
&= d^2 q_i(x)(Q_j(x), y) \\
&= B(dQ_i(x).Q_j(x), y)
\end{aligned}$$

où  $q_i = p_{j_i}$ . Donc :

$$< d\omega_{ij}(x), y > = B(dQ_i(x).Q_j(x) + dQ_j(x).Q_i(x), y)$$

et

$$\nabla \omega_{ij}(x) = dQ_i(x).Q_j(x) + dQ_j(x).Q_i(x)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
m'_i m'_j \nabla \omega_{ij}(e) &= m'_i(m'_j dQ_i(e).Q_j(e)) + m'_j(m'_i dQ_j(e).Q_i(e)) \\
&= (m'_i + m'_j) \left( \frac{1}{2} [y_i, z_j] + \frac{1}{2} [y_j, z_i] \right) \\
&= (m'_i + m'_j) [y_i, z_j]
\end{aligned}$$

et enfin :

$$[y_i, z_j] = \frac{m'_i m'_j}{m'_i + m'_j} \nabla \omega_{ij}(e)$$

**3.4.** On voit apparaître les “produits scalaires”  $\omega_{ij}$  déjà présents ailleurs, en particulier dans les travaux d’Arnold et Givental ([A], [G]) sous le nom de convolution ou déplacement des invariants.

• Chaque  $\omega_{ij}$  est une fonction polynôme invariante sur  $\mathfrak{g}$ , homogène de degré :  $(m'_i + m'_j)$ . Notons  $I_+$  l’idéal de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$  engendré par  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Il existe des constantes  $c_{ij}^k$  ( $1 \leq k \leq r$ ), bien déterminées, telles que :

$$\omega_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq r} c_{ij}^k p_k \quad \text{mod } I_+^2$$

La fonction  $\omega'_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq r} c_{ij}^k p_k$  s’appelle la “partie linéaire” de  $\omega_{ij}$  dans les travaux d’Arnold-Givental déjà cités. On a alors :

$$\nabla \omega_{ij}(e) = \nabla \omega'_{ij}(e) = \sum_{1 \leq k \leq r} c_{ij}^k P_k(e)$$

car le gradient d'une fonction appartenant à  $I_+^2$  est nul en tout nilpotent de  $\mathfrak{g}$ .

**3.5.** Supposons dorénavant, en plus de l'hypothèse déjà faite, que les exposants de  $\mathfrak{g}$  soient 2 à 2 distincts :  $1 = m_1 < m_2 < \dots < m_r$ . Alors, comme indiqué dans [Ri], une base de  $\delta$  est constituée par les  $P_j(e)$  qui sont non nuls. Autrement dit, avec les notations précédentes,  $\{j_1, j_2, \dots, j_s\}$  est l'ensemble des indices  $j$  tels que  $P_j(e) \neq 0$ . Dans cette circonstance,  $\nabla \omega_{ij}(e)$  est non nul si et seulement si :  $\omega'_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq s} \alpha_{ij}^k q_k$ , où les  $\alpha_{ij}^k$  ne sont pas tous nuls.

• **Conclusion :**

1. Lorsque  $m'_i + m'_j - 1$  n'est pas un exposant de  $(\mathfrak{g}, e)$ ,  $\omega'_{ij} = 0$  et :  $[y_i, z_j] = 0$ . C'est le cas en particulier lorsque  $m'_i + m'_j - 1 > m'_s$ .
2. Lorsque  $m'_i + m'_j = 1 + m'_k$ , pour un entier  $k$  alors bien déterminé, on a :  $\omega'_{ij} = \alpha_i q_k$ ,  $\alpha_i$  étant un nombre complexe, et  $[y_i, z_j] = \beta_i Q_k(e)$ , où  $\beta_i$  est un nombre complexe qui est un multiple de  $\alpha_i$  :

$$\beta_i = \frac{m'_i m'_j}{1 + m'_k} \alpha_i$$

de sorte que  $[y_i, z_j] \neq 0$  ssi  $\omega'_{ij} \neq 0$ .

**3.6.** Soit  $\mathcal{A}$  la matrice  $([y_i, z_j])_{1 \leq i, j \leq s}$ . Cette matrice est pseudo-triangulaire :

$$[y_i, z_j] = 0 \quad \text{lorsque } i + j > s + 1$$

et :  $[y_i, z_{s+1-i}] = \beta_i Q_s(e)$ . La matrice  $\mathcal{A}$  étant considérée comme une matrice à coefficients dans l'algèbre symétrique de  $\mathfrak{g}$ , on calcule son déterminant :

$$\det \mathcal{A} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s (Q_s(e))^s.$$

• Soit  $\mathcal{B} = (\omega'_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}$ . C'est une matrice pseudo-triangulaire à coefficients fonctions polynômes sur  $\mathfrak{g}$  et

$$\det \mathcal{B} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s (q_s)^s.$$

Il vient la conclusion :  $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$  ssi  $\det \mathcal{A} \neq 0$  ssi  $\det \mathcal{B} \neq 0$ . Plus précisément, on rappelle que :  $\text{ind}(\eta, \delta) = \dim \delta - \text{rg}(\mathcal{A})$ , où  $\text{rg}(\mathcal{A})$  est le rang de  $\mathcal{A}$ .

**3.7.** Revenons au cas particulier où  $e$  est un élément nilpotent régulier. Dans ce cas, on a :  $\text{ind}(\eta, z) = 0$  d'après un théorème de Panyushev ([Pa], 5.6), i.e. :

$$\det \mathcal{A} = \gamma (P_r(e))^r, \quad \gamma \in \mathbb{C}^*$$

et  $P_r(e)$  est l'élément de plus grande  $h$ -graduation dans  $z : [h, P_r(e)] = 2m_r P_r(e)$ .

Par ailleurs, le fait que  $\det \mathcal{B}$  soit non nul apparaît déjà dans [A] et principalement dans [G]. Dans ce dernier article cité, on trouvera les calculs explicites pour les algèbres de type  $B_n, C_n, D_n, F_4$  et  $E_6$ , des produits scalaires  $\omega_{ij}$  (pour un choix particulier des  $p_j$ ). On peut utiliser ces calculs pour déterminer les nombres  $\text{ind}(\eta, \delta)$  à condition que l'hypothèse faite :

“ $\delta(e) = \sum_{1 \leq j \leq r} \mathbb{C} P_j(e)$ ” soit vérifiée. Pour les algèbres de Lie classiques, c’est le cas pour tous les éléments nilpotents des algèbres  $sl(n)$ ,  $so(2n+1)$ ,  $sp(2n)$  et pour certains types de nilpotents de  $so(2n)$ ; dans toutes ces situations, il a été prouvé par Panyushev ([Pa], theorem 4.7) que le groupe  $N$  associé à  $\eta$  admet un nombre fini d’orbites dans  $\eta^*$ , et en particulier que :  $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$ . Le point de vue adopté ici (passage par les  $\nabla \omega_{ij}(e)$ ) n’apporte rien de nouveau. Toutefois, les calculs explicites de Givental ([G]) des  $\omega_{ij}$  pour des algèbres exceptionnelles, par exemple  $F_4$  et  $E_6$ , permettent d’écrire la matrice  $\mathcal{A} = ([y_i, z_j])_{i,j}$  pour les nilpotents particuliers vérifiant l’hypothèse rappelée plus haut, et par suite de calculer  $\text{ind}(\eta, \delta)$ .

Il reste au moins à faire la liste des éléments nilpotents auxquels on peut appliquer cette méthode et à expliquer l’intervention des  $\omega_{ij}$ .

## Bibliographie

- [A] ARNOLD V.I., *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*. Comm. Pure Appl. Math., 29, (1976), 557-582.
- [Bol] BOLSINOV A.V., *A criterion for the completeness of a family of functions in involution that is constructed by the argument translation method*. Soviet Math. Dokl., 38, no. 1, (1989), 161-165.
- [G] GIVENTAL A.B., *Displacement of invariants of groups that are generated by reflections...* Funct. Ana. Appl., 14, (1980), 81-89.
- [Pa] PANYUSHEV D.I., *The index of a Lie algebra, the centraliser of a nilpotent element, and the normaliser of the centraliser*. Math. Proc. Cambridge, 134, (2003), 41-59.
- [Ra] RAÏS M., *Sur les dérivées des polynômes invariants sur une algèbre de Lie simple*. Manuscrit, (1988).
- [Ri] RICHARDSON R.W., *Derivatives of invariant polynomials on a semi-simple Lie algebras*. In Proceeding miniconf. harm. analysis 15, (1987), Australian National Univ. Canberra, (1987), 228-242.
- [Tau] TAUVEL P., *Introduction à la théorie des algèbres de Lie*. Paris, Diderot Editeurs, (1998).